Das Problem:
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{x-2}+14=x$.

Lösungsvorschlag:
Die Definitionsmenge der Gleichung bestimmt sich aus dem Radikanden und ist

$$D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>2\}.$$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2}+14 &= x && |\,\text{Wurzel isolieren}\\
\sqrt{x-2} &= x-14 && |\,\text{quadrieren}\\
x-2 &= (x-14)^2 && |\,\text{normalisieren}\\
x^2-29x+198 &= 0 && |\,\text{Lösungsformel}\\
x &\in \{11;18\}
\end{aligned}$$

Die beiden erhaltenen Lösungskandidaten liegen in D, müssen aber jetzt *unbedingt* nacheinander in der Ausgangsgleichung geprüft werden:

$$\begin{aligned}
\text{Probe } x_1\text{:}\quad \sqrt{11-2}+14 &= 11\\
17 &\neq 18\\
\text{Probe } x_2\text{:}\quad \sqrt{18-2}+14 &= 18\\
18 &= 18
\end{aligned}$$

Die Probe entlarvt $x_1=11$ als *Scheinlösung*. Damit ist die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung $L=\{18\}$.

Telefon Feftnetz: 036847-31579, Telefon unterwegs: 0163-7557571
Internet: www.mathe-nachgeholfen.de, E-Mail: mail@mathe-nachgeholfen.de

Das Problem:

Untersuche die Zahlenfolge (a_n) mit dem expliziten Bildungsgesetz

$$a_n = -n^2 - (n+1)$$

auf Monotonie und Schranken.

Lösungsvorschlag:

Monotonie: Zunächst werden einige benachbarte Glieder der Folge ausgerechnet, etwa $a_1 = -3$, $a_2 = -7$ und $a_3 = -13$. Es ist also $a_1 > a_2 > a_3$, woraus auf (streng) fallende Monotonie zu schließen ist. Bewiesen werden muß nun, daß

$$a_{n+1} \leq a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ oder ab einem festen n_0 dann für alle weiteren gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\leq a_n \\
-(n+1)^2 - ((n+1)+1) &\leq -n^2 - (n+1) && \mid \text{Klammern aufl., zusammenfassen} \\
-n^2 - 3n - 3 &\leq -n^2 - n - 1 && \mid \text{ordnen} \\
-2n &\leq 2 && \mid \div (-2) \text{ [Relationszeichen kehrt sich um!]} \\
n &\geq 1
\end{aligned}$$

Dies ist eine stets wahre Aussage – es gilt also $a_{n+1} \leq a_n$ für *alle* $n \in \mathbb{N}$, woraus die fallende Monotonie von (a_n) folgt.

Schranken: Wegen der Monotonie ist $K_o = -3$ eine *obere* Schranke. Um eine möglichst große *untere* Schranke zu finden, werden möglichst große Folgenglieder untersucht. So ist z.B. $a_{10000} = -10000^2 - 10001 < -10^5$, $a_{1000000} < -10^7$ oder $a_{10^{20}} < -10^{40}$. Es scheint so, als ob die Folge nach unten unbeschränkt ist, also keine untere Schranke existiert. Dies muß formal bewiesen werden (nach dem Prinzip der *Kontraposition*). Angenommen, es gäbe eine untere Schranke K_u. Dann gälte

$$\begin{aligned}
a_n &\geq K_u \\
-n^2 - (n+1) &\geq K_u && \mid \text{in Form bringen} \\
-n^2 - n - 1 &\geq K_u.
\end{aligned}$$

Ist n eine natürliche Zahl größer $|K_u|$, so ist die Annahme falsch (klarmachen!). Da K_u beliebig gewählt wurde, ist die Unbeschränktheit von (a_n) nach unten hin bewiesen.

© Daniel Hoffmann, Breitenberger Weg 1, 98547 Viernau
Telefon Feftnetz: 036847-31579, Telefon unterwegs: 0163-7557571
Internet: www.mathe-nachgeholfen.de, E-Mail: mail@mathe-nachgeholfen.de

Das Problem:

Ein Guthaben von 15000 € wird zu 5,25% über mehrere Jahre hinweg angelegt.

a) Welche Zinsen werden im vierten Jahr gutschrieben?

b) Welches Endkapital ist nach dem vierten Jahr verfügbar?

c) In welchem Zeitraum hat sich das Guthaben verdreifacht?

d) Zu welchem Zinssatz hätte das Guthaben angelegt werden müssen, damit nach vier Jahren 20000 € verfügbar sind?

Lösungsvorschlag:

Zu Beginn sind 15000 € vorhanden und am Ende des ersten Jahres werden davon 5,25% zugeschlagen. Es gilt also

$$K_1 = 15000 + 15000 \cdot 5{,}25\% = 15000 + 15000 \cdot 0{,}0525 = 15000 \cdot 1{,}0525$$

und für das zweite Jahr

$$K_2 = K_1 \cdot 1{,}0525 = (15000 \cdot 1{,}0525) \cdot 1{,}0525 = 15000 \cdot 1{,}0525^2,$$

man erkennt die Tendenz (klarmachen!) – fürs n-te Jahr gilt

$$K_n = 15000 \cdot 1{,}0525^n \qquad \textit{Zinseszinsformel}$$

a) Zinsen im vierten Jahr: $K_3 \cdot 0{,}0525 = 15000 \cdot 1{,}0525^3 \cdot 0{,}0525 = \underline{\underline{918{,}16\,€}}$.

b) Endkapital nach vier Jahren: $K_4 = 15000 \cdot 1{,}0525^4 = \underline{\underline{18407\,€}}$.

c) Die Anlagezeit für eine Verdreifachung des Startguthabens berechnet sich so:

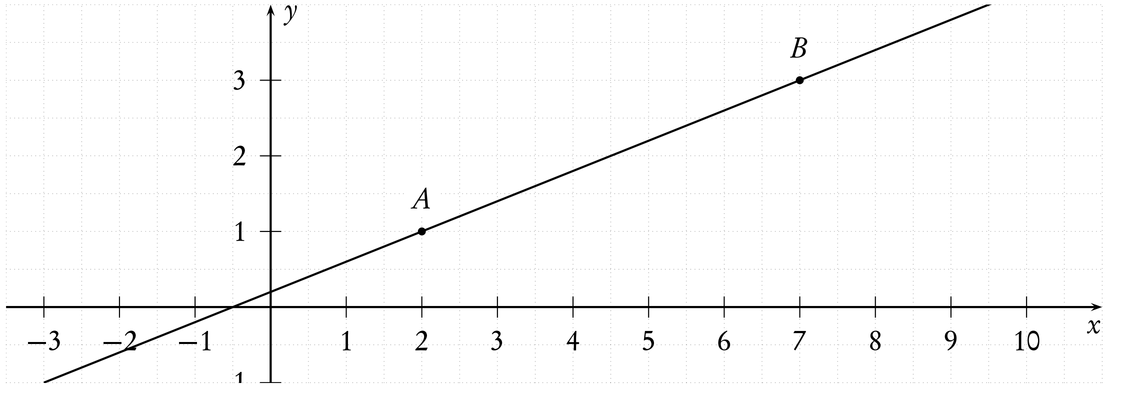
$$\begin{aligned} 45000 &= 15000 \cdot 1{,}0525^n && \mid \text{vereinfachen} \\ 3 &= 1{,}0525^n && \mid \text{Exponenten via Logarithmus „herunterholen“} \\ n &= \frac{\lg(3)}{\lg(1{,}0525)} \approx 19{,}54 && \Rightarrow \underline{\underline{\text{Anlagezeit: 20 Jahre}}} \end{aligned}$$

d) Der Zinssatz für einen Zuwachs auf 20000 € in vier Jahren berechnet sich so:

$$\begin{aligned} 20000 &= 15000 \cdot q^4 && \mid \text{vereinfachen} \\ \tfrac{4}{3} &= q^4 && \mid \sqrt[4]{()} \\ q &= \sqrt[4]{\tfrac{4}{3}} \approx 1{,}07457 && \Rightarrow \underline{\underline{\text{Zinssatz: 7,46\%}}} \end{aligned}$$

© Daniel Hoffmann, Breitenberger Weg 1, 98547 Viernau
Telefon Feftnetz: 036847-31579, Telefon unterwegs: 0163-7557571
Internet: www.mathe-nachgeholfen.de, E-Mail: mail@mathe-nachgeholfen.de

Das Problem:
Wie lautet die Funktionsgleichung des abgebildeten Graphen?



Lösungsvorschlag:

Der Graph ist eine Gerade – daher ist die zugehörige Funktion linear. Willkürlich werden zwei (günstige) Punkte markiert, etwa $A(2|1)$ und $B(7|3)$. Zur Bestimmung der Vorschrift werden zwei Möglichkeiten vorgestellt.

a) Die Koordinatendifferenzen ergeben $\Delta x = 7 - 2 = 5$ und $\Delta y = 3 - 1 = 2$ und daraus folgt für den *Differenzenquotienten* $m = \frac{2}{5}$. Durch Einsetzen von $m = \frac{2}{5}$ und etwa $x_A = 2$ und $y_A = 1$ in die abstrakte Funktionsvorschrift folgt schließlich $n = \frac{1}{5}$.

b) In die abstrakte Vorschrift der linearen Funktion werden die Koordinaten der Punkte an den entsprechenden Stellen eingesetzt, was auf die beiden Gleichungen

$$1 = 2m + n$$
$$3 = 7m + n$$

führt. Diese werden (und das ist hier prinzipiell immer möglich) subtrahiert, was auf $2 = 5m$ führt. Folglich ist $m = \frac{2}{5}$. Koeffizient n berechnet sich genauso wie in (a).

Insgesamt lautet die Funktionsgleichung damit

$$g : y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}.$$

Telefon Feftnetz: 036847-31579, Telefon unterwegs: 0163-7557571
Internet: www.mathe-nachgeholfen.de, E-Mail: mail@mathe-nachgeholfen.de