

# AUFGABENSERIE

## zur Erprobung des math. Kenntnisstandes

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
					8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20			

Für *Willi Neuenhagen*, Gymnasium Klasse X.

Zu bearbeiten bis *Donnerstag, 20. August*. Insgesamt also 12 Tage Zeit.

### Aufgabe 1 ...ua100

Beweise durch Vollständige Induktion die Gültigkeit der nachstehenden Summenformeln für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 = \sum_{k=1}^n 2k - 1 = n^2 \quad (2)$$

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1) \quad (3)$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad (5)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \quad (6)$$

### Aufgabe 2 ...ua691

Vereinfache und schreibe das Ergebnis ohne Bruchstrich.

a)  $\left[ \frac{a^2(bc)^4}{(ab)^4c^3} \right] \cdot \left[ \frac{a^5b^0c^2}{a^7c^6} \right]^3$       b)  $\left[ \left( \frac{2a^{-1}b^2}{3a^5c^{-3}} \right)^3 \div \left( \frac{3a^6b^{-4}}{7a^{-2}c^4} \right)^{-2} \right] \cdot \left( \frac{-c^0}{7a} \right)^{-1}$

c)  $\frac{(3u^4v^{-1})^2}{(9u^{-2}v^{-3})^{-1}} \div \frac{(2u^{-6}v^3)^{-3}}{(2u^5v^{-2})^4}$       d)  $\frac{0,8a^6b^{-5}c^3}{3^{-3}a^{-3}b^4} \div \frac{9b^{-1}}{a^{-4}c^2}$

**Aufgabe 3** ...ua569

Vereinfache soweit wie möglich.

$$\left[ \frac{\left( a^{-\frac{1}{8}} \sqrt[5]{b^4} \right)^2}{a^{\frac{3}{4}} \sqrt{a^{-5} b^{\frac{1}{5}}}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

**Aufgabe 4** ...ua705

Die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $ax + y = b$  geht durch die Punkte  $P(-2|-4)$  und  $Q(1|2)$ . Bestimme die Parameter  $a$  und  $b$  mithilfe eines Gleichungssystems.

**Aufgabe 5** ...ua79

Eine Parabel 3. Ordnung wurde um vier Einheiten entlang der  $y$ -Achse verschoben. Eine zweite Parabel derselben Ordnung wurde zunächst an der  $y$ -Achse gespiegelt und anschließend so verschoben, daß sie symmetrisch zum Punkt  $(0|-12)$  ist.

Wo schneiden sich beide Parabeln?

**Aufgabe 6** ...ua307

Vereinfache die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich.

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

b)  $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$

c)  $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$

d)  $\sqrt[3]{4} \div \sqrt[3]{16}$

e)  $\sqrt[4]{32} \div \sqrt[4]{2}$

f)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

g)  $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^4}}$

h)  $\sqrt[5]{3^{-2}} \div \sqrt[5]{3^{-2}}$

i)  $\sqrt{\frac{1}{10} \sqrt[3]{1000}}$

j)  $\sqrt{\frac{15}{24}} \div \sqrt{\frac{9}{25}}$

k)  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$

l)  $\sqrt[3]{(-3)^6}$

m)  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{32}$

n)  $\sqrt[3]{320} \div \sqrt[3]{5}$

o)  $\left[ \sqrt{(-5)^4} \right]^{-1}$

**Aufgabe 7** ...ua179

Alles Gold der Welt

Die gesamte bisher geförderte Goldmenge würde einen Würfel von 16 m Kantenlänge füllen. Gold hat eine Dichte von  $\varrho = 19,3 \text{ t/m}^3$ .

- Welche Masse  $m(a)$  hat ein Goldwürfel in abhängig von seiner Kantenlänge  $a$ ?
- Skizziere den Graphen der Funktion  $a \mapsto m(a)$  im Intervall  $0 \leq x \leq 16$ .

**Aufgabe 8** ...ua468

Bestimme alle Lösungen der folgenden goniometrischen Gleichungen in  $\mathbb{R}$ .

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| a) $\sin^2 x + \sin x = 0$          | b) $\cos^2 x - \cos x = 0$                         |
| c) $\tan^2 x - 2 \tan x = 0$        | d) $3 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$                     |
| e) $4 \sin^2 x = -3 \sin x$         | f) $\frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{3} \sin x = 0$ |
| g) $\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x = 0$ | h) $2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$              |

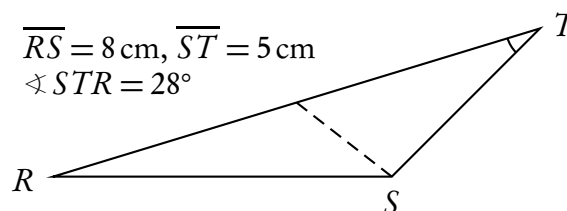
**Aufgabe 9** ...ua54

Zeichne auf weißem Papier irgendeine beliebige Strecke ein und löse durch Konstruktion, d.h. allein mithilfe von Zirkel, Lineal, Dreieck das nachstehende Problem. Der Taschenrechner darf nicht verwendet werden! (Bitte für jedes Problem eine eigene Strecke einzeichnen.)

- Teile die Strecke in zwei gleichgroße Teilstrecken.
- Teile die Strecke in sieben gleichgroße Teilstrecken.
- Teile die Strecke im Verhältnis 2 : 3.
- Teile die Strecke im Verhältnis  $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ .
- Teile die Strecke im Verhältnis 1,5 : 1.
- Bestimme einen Punkt auf der Strecke, der  $\frac{3}{5}$  der Streckenlänge von einem Ende der Strecke entfernt liegt. In welchem Verhältnis stehen die Streckenabschnitte zueinander?

**Aufgabe 10** ...ua274

Gegeben ist das Dreieck  $RST$  mit den folgenden Stücken:



- Welche Länge hat die Seitenhalbierende von  $\overline{RT}$ ?
- Welchen Umfang und welchen Flächeninhalt besitzt das Dreieck?

**Aufgabe 11** ...ua273

Die durch das lineare Gleichungssystem

$$y = -2x + 5$$

$$3y - 2x = 3$$

gegebenen Geraden  $g_1$  und  $g_2$  schneiden sich im Punkt  $S$ . Darüberhinaus wird die  $y$ -Achse von  $g_1$  im Punkt  $Q$  und von  $g_2$  im Punkt  $R$  geschnitten. Diese drei Punkte legen ein Dreieck  $QRS$  fest.

- Fertige zunächst eine Skizze an und berechne dann den Winkel  $\sphericalangle SQR$ .
- Welchen Umfang und welchen Flächeninhalt besitzt das Dreieck?

**Aufgabe 12** ...ua806

Im Knöpperteich blühen jetzt Teichrosen. Neugierig geworden, rudern Willi Neuenhagen, Gudrun Wetterschlag und Stefan Wedekind mit einem Faltboot zu einer Rose hin. Willi zieht an ihr und kann sie etwa 30 cm über die Wasseroberfläche herausheben bis sie strafft. Stefan reißt einige ca. 50 cm lange, aus dem Wasser ragende Schilfrohre heraus, Gudrun rudert davon und Willi läßt währenddessen die Rose straff gleiten, bis sie auf dem Wasser zu Liegen kommt. Gudrun stoppt als Willi schreit, und Stefan Wedekind gibt bekannt, daß die zurückgelegte Strecke, mithilfe der Schilfrohre gemessen, 1,20 m beträgt.

Wie tief ist der Teich an der Stelle, an der die Rose wurzelt?

**Aufgabe 13** ...ua685

Flucht aus Heidelberg

Im Jahr 1855 flüchtete in Heidelberg ein Student nach einem Duell mit einer Legitimationskarte, die er sich von einem Kommilitonen ausgeliehen hatte. Als die Flucht über die Grenze gelungen war, warf der Student die Karte fort; sie wurde als verdächtig an das Heidelberger Universitätsgericht eingesandt. In der folgenden Untersuchung antwortete der Kommilitone, dem die Karte gehörte, mit einem Satz, der sich zunächst unter den Studenten schnell verbreitete und heute als Redewendung allgemein bekannt ist. Dieser Satz ist der Lösungsspruch des Rätsels.

1. Zunächst müssen die folgenden Zahlen berechnet werden.

- |  |   |
|--|---|
| a) $\log_3 27$                         | b) $\log_3 x = 2 \rightarrow x =$                             |
| c) $\log_x 49 = 2 \rightarrow x =$     | d) $\log_{\frac{3}{4}} 3 - \log_{\frac{3}{4}} 4$              |
| e) $(\log_2 2^{25}) \div (\log_5 5^5)$ | f) $\log_3 5 + \log_3 \frac{1}{5}$                            |
| g) $\log_2 4^2 + \log_2 4$             | h) $\log_2 16 \cdot \log_2 4$                                 |
| i) $6 \log_3 3 + \log_3 \frac{1}{9}$   | j) $4(\log_2 88 - \log_2 11)$                                 |
| k) $\log_2 (\log_2 2^{2^{10}})$        | l) $2 \log_2 5 + \log_3 90 + \log_2 \frac{1}{25} - \log_3 10$ |

2. Die gewonnenen Zahlen werden nun wie folgt kodiert:

Lösung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Buchstabe	H	S	E	V	T	C	N	O	A	W	I

Lösung	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Buchstabe	B	M	Q	Y	L	Z	G	P	X	R	F

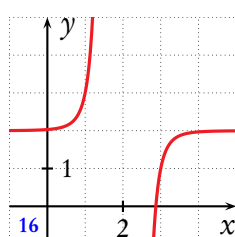
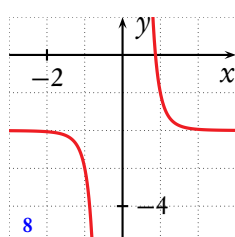
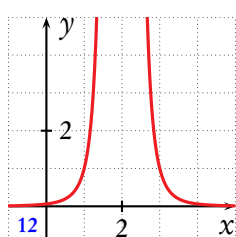
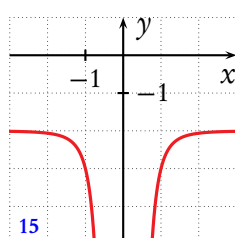
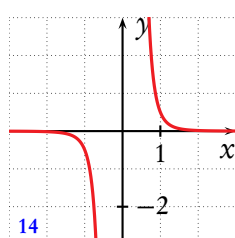
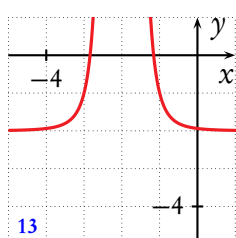
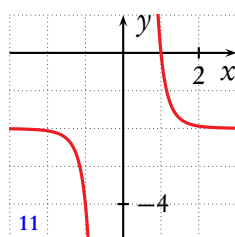
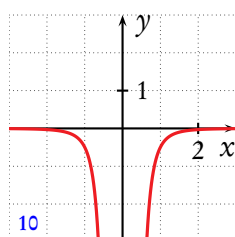
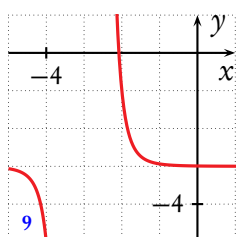
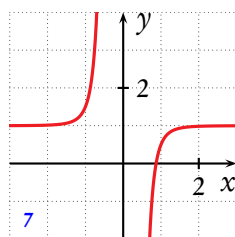
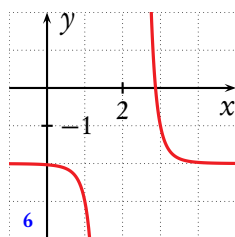
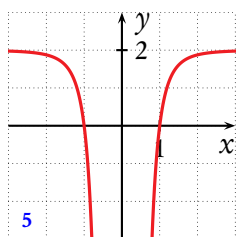
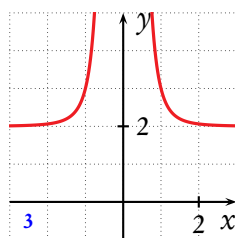
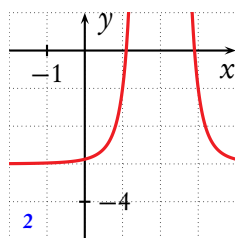
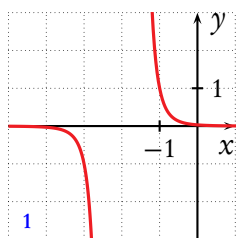
3. Als *Lösungssatz* ergibt sich eine Redewendung, wenn die Codes hier unten den Aufgabennummern aus (1) zugeordnet werden.

j)	l)	k)	g)	g)	h)	j)	l)	k)	d)	i)	f)	h)	d)	l)

k)	e)	f)	b)	l)	k)	d)	d)	a)	c)	g)	g)	k)	e)	f)	i)	d)

**Aufgabe 14** ...ua177

Vorgelegt sind 15 diverse Hyperbeln  $n$ -ten Grades und 15 zugehörige Funktionsvorschriften. Welche Vorschrift gehört zu welchem Graphen?



$$f_1(x) = x^{-4} + 2$$

$$f_2(x) = 2x^{-5} - 2$$

$$f_3(x) = (x + 2)^{-4} - 2$$

$$f_4(x) = 2 \left( (x - 2)^{-4} - \frac{3}{2} \right)$$

$$f_5(x) = \frac{1}{2}x^{-5}$$

$$f_6(x) = (x - 2)^{-4}$$

$$f_7(x) = -x^{-4} - 2$$

$$f_8(x) = 2(-x^{-4} + 2)$$

$$f_9(x) = (x + 2)^{-5}$$

$$f_{10}(x) = 2 \left( (x + 3)x^{-5} + 2 \right) - 7$$

$$f_{11}(x) = -\frac{1}{2} \left( x^{-5} - 2 \right)$$

$$f_{12}(x) = x^{-5} - 2$$

$$f_{13}(x) = -2x^{-4} + 2$$

$$f_{14}(x) = -\frac{1}{2}x^{-4}$$

$$f_{15}(x) = (x - 2)^{-5} - 2$$

**Aufgabe 15** ...ua879

Gegeben sind die vier Funktionen

$$f_1: 3(x + y) = 0, \quad f_2: 2x = 2y, \quad f_3: 1 + 2y = 2 + x, \quad f_4: x^2 + 2 = 2y + x^2$$

und die vier Punkte  $A(4|6)$ ,  $B(0|2)$ ,  $C(3|0)$ ,  $D(-4|1)$ .

- Gib jeweils Anstieg und  $y$ -Achsenabschnitt der Funktionen  $f_1, \dots, f_4$  an.
- Skizziere die Funktionen  $f_1, \dots, f_4$  in ein und dasselbe Koordinatensystem.
- Die Punkte  $A$  und  $C$  gehören zur linearen Funktion  $f_5$ , die Punkte  $B$  und  $D$  gehören zur linearen Funktion  $f_6$ .  
Skizziere diese Funktionen in das Koordinatensystem aus (b) und bestimme ihre Funktionsvorschriften.
- Gib rechnerisch für jede Funktion den *Funktionswert* an der Stelle 11 an.
- Bestimme rechnerisch für jede Funktion jeweils diejenige *Stelle*, an der der Funktionswert 11 angenommen wird.
- Berechne für jede Funktion die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die *Länge* der dadurch festgelegten Strecke.
- Bestimme für jede Funktion den Wertebereich unter dem Definitionsbereich  $D = [-1, 1]$ .
- Berechne die Schnittpunkte von  $f_1$  und  $f_6$  sowie die Schnittpunkte von  $f_2$  und  $f_5$ .  
Kontrolliere das Ergebnis an der Skizze.

**Aufgabe 16** ...ua688

Gib einen möglichen Funktionsterm für die Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  an, welche die jeweils angegebene Eigenschaft haben soll. Eine Definitionsmenge braucht nicht angegeben zu werden; es wird die für den jeweiligen Term maximal mögliche vorausgesetzt.

- Die Funktion  $f$  hat genau die zwei Nullstellen 3 und 0.
- Die Funktion  $g$  ist bei  $x = 2$  nicht definiert.
- Die Funktion  $h$  besitzt den Wertebereich  $-1 \leq y \leq 2$ .

**Aufgabe 17** ...ua920

Wie breit ist ein Kreisring mit  $10 \text{ m}^2$  Flächeninhalt und 1 m Innenradius?

**Aufgabe 18** ...ua928**Rentenerhöhung im Juli 2009**

Nach jahrelangen Nullrunden oder weniger nennenswerten Erhöhungen tritt im Juli 2009 nun eine deutliche Erhöhung der gesetzlichen Renten in Kraft. In den alten Bundesländern beträgt die Erhöhung 2,41% und für die neuen Bundesländer ist eine Erhöhung von 3,36% vorgesehen. Rentenerhöhungen sind an die durchschnittlichen Lohnsteigerungen pro Jahr gekoppelt. Diese betragen im vergangenen Jahr im Westen 2,1% und im Osten 3,1%.

Deswegen fällt der Rentenzuschlag im Osten höher aus als im Westen.

Die tatsächlich spürbare Erhöhung fällt sogar noch etwas stärker aus, da gleichzeitig eine Senkung des Beitragssatzes zur Krankenversicherung beschlossen wurde, und zwar von 14,6% auf 14%.

Steuern und Beiträge zur Krankenversicherung werden bei der gesetzlichen Rentenversicherung automatisch von der Brutto-Rente abgezogen.

- Eine Rentnerin in Hohleborn hat zur Zeit nach allen Abzügen eine Monatsrente von 886,56 €. Welche monatliche Rente erhält sie nach der Erhöhung netto?
- Ein Rentner in Eußenhausen hat nach der Erhöhung eine Netto-Rente von 1436,15 €. Wie hoch war seine Brutto-Rente vor der Erhöhung?

**Aufgabe 19** ...ua385

Durch die Punkte  $A(-6|5|8)$ ,  $B(-5|2|4)$  und  $C(-6|6|12)$  ist eine Ebene  $E$  festgelegt.

- Bestimme eine Gleichung dieser Ebene in Normalenform.  
**Mögliches Ergebnis:**  $E : 8x_1 + 4x_2 - x_3 + 36 = 0$
- Ermittle für die Schnittgerade der Ebene  $E$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene eine Parametergleichung.
- Die Gerade  $g$  ist gegeben durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Schnittwinkel von  $g$  und  $E$ .

- Bestimme die *beiden* Punkte auf  $g$ , die von der Ebene  $E$  5 Längeneinheiten entfernt sind.